

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

İNŞAAT FAKÜLTESİ

TATBİKİ MEKANİK KOLU

DİPLOMA TRAVAYI

YÖNETEN

PROFESÖR DOKTOR MUSTAFA İNAN

ÖĞRENCİ

MEHMET BİLDİRİCİ

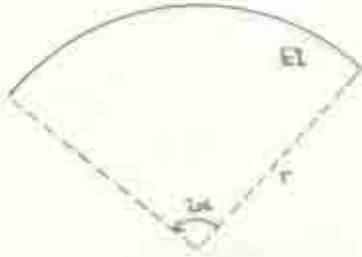
7232

HAZİRAN 1962

AÇIKLAMA

Bu çalışma benim diploma almak için yaptığım son çalışmadır. Teknik bir konudur. Ama en azından bir fikir vereceğine inanıyorum.

KENDİ DÜZLEMLERİNDE YÜKLENMİŞ DAİRE
EKSENLİ QUBUKLARIN STATİĞİ



Yarıçapı r ve merkez açısı 2α olan bir dairesel qubuk seğıelim. Herhangi bir zükle yüklenmiş olsun. Bir noktanın polar koordinatları da (r, ψ) olsun.

Daireden bir kesit alarak herhangi bir noktanın deplasmanını inceleyelim:

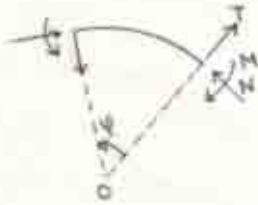


İlk daire formunda bulunan A noktası v teğetsel ve w radyal deplasmanı ile A' noktasına gitmiş olsun.
 w : ilk ekseninden merkeze doğru olursa pozitif
 v : A noktasını karakterize eden (r, ψ) kutup nok-

koordinatlarından ψ 'yi arttırmak şeklinde olursa pozitif-

$A(r, \psi)$ $A'(R, \psi)$ ile gösterilmes.

Kesit tesirleri için:



ψ açısı şeklindeki gibi artmak şartı ile meydana gelen M eğilme momenti, T kesme kuvveti ve N normal kuvvetini şekildeki yönler le gösterelim.

E: sistemin elastisite modülü

I: kesitin taraflısız eksenine göre atalet momenti

Eğilme Halindeki Deformasyon



Şekilsel m nispetli deformasyondan sonra w yitisi O 'nın değerinden

$$R = \sqrt{r^2 + (r-w)^2} \quad \text{olur}$$

$$R = \sqrt{r^2 + w^2 - 2rw} = r \sqrt{\frac{w^2 + r^2}{r^2} - \frac{2w}{r} + 1}$$

burada $\frac{w^2 + r^2}{r^2}$ ya $1 - \frac{2w}{r}$ yanında terkedersek

$$R \approx r \sqrt{1 - \frac{2w}{r}} \approx r - w \quad \text{bulunur (binom'a atarak)}$$

En genel eğilme kanunu:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{M}{EI} \quad \& \quad m' \text{ deni eğrilik yarıçapı}$$

Kutupsal koordinatlarla

$$\frac{1}{s} = \frac{R^2 + 2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R \frac{d^2R}{ds^2}}{\left[R^2 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2\right]^{3/2}} \quad \text{bulunur}$$

R nin yukardaki değerinden $\frac{dR}{ds} = -\frac{dw}{ds} \quad \frac{d^2R}{ds^2} = -\frac{d^2w}{ds^2}$ olur

güçle derceden sonra hesapları $\left(\frac{dw}{ds}\right)^2$ terkedersek

$$\frac{1}{s} = \frac{(r-w) + \frac{d^2w}{ds^2}}{(r-w)^2} \quad \text{bulunur}$$

$$\frac{1}{(r-w)^2} = \frac{1}{r^2 \left(1 - \frac{w}{r}\right)^2} \approx \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{2w}{r}\right) \quad \text{bu değeri yukarıda yerine koyarak}$$

$$\frac{1}{s} = \left[\left((r-w) + \frac{d^2w}{ds^2} \right) \frac{1 + \frac{2w}{r}}{r^2} \right] \quad \text{güçle derceden terimleri terkedersek}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{w}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2w}{ds^2} \quad \text{buradan}$$

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \left[w + \frac{d^2w}{ds^2} \right] = \frac{M}{EI} \quad \text{bulunur}$$

Dönme Fonksiyonu

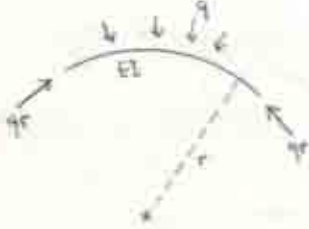
Bir noktanın ilk formdaki teğeti ile deforme haldeki teğeti arasında ki açı Ω olsun. Eğriliğe bağlı değişim dönmenin diferansı olacağından

$\frac{d\Omega}{rd\varphi} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r}$ $\frac{1}{R} - \frac{1}{r}$ yerine bulduğumuz karşılığı da ilerde çıkaracağız. $w = \frac{3r}{2R}$ gözününe alırsak

$$\frac{d\Omega}{rd\varphi} = \frac{1}{R} \left(\frac{dr}{d\varphi} + \frac{d^2r}{d\varphi^2} \right) \text{ bulunur. Entegre ederek}$$

$$\Omega = \frac{1}{r} \left(r + \frac{d^2r}{d\varphi^2} \right)$$

DAİRE EKSENİ GÜBÜKLARIN RADYAL BASINCI BURKULMASI



Kemer $q=st$ radyal basıncı ile yükleniyor.

$q < q_k$ olmak şartı ile elementer kiri ile hesap yapılırsa sadece $N = qr$ basıncı gerilmesi bulunur.

Kemerde diğer kesit tensörleri ve deformasyonlar meydana gelmez. (Ester Gubuğu gibi)

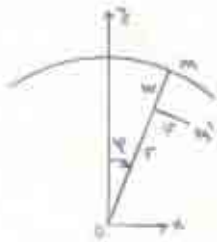
q belirli bir değeri aşarsa sistem deformeşya yapar ve $r \neq w \neq \Omega \neq \varphi$ olur. Deforme durum üzerinde denge denklemleri yazılırsa $M \neq 0$ $T \neq 0$ $N \neq qr$ olur. Normal kuvvetin qr den olan farkından P oluşur. Biz bu altı değer in meydana gelmesi ile acaba ikinci bir denge konumu olacak mı?

Burada şu kabulleri yapacağız:

- 1) Kemerin deformatsyonunda normal kuvvetlerden meydana gelen kısalmalar terk edilecek (Liftlerde kısalma yok)

2) Kemer kararla denge durumunda geçtiğinde yani eksen daire olmak
tan sekliğinde de kuvvetler kemer eksenine dik kalırlar.

Liflerin kısılmazlığını ifade eden bağıntı:



m noktasındaki ds elemanı deformatsiyondan sonra
 m' de $d\bar{s}$ olur. Bu elemana ait birim uzama

$$\epsilon = \frac{d\bar{s} - ds}{ds} \quad \text{Bu elemana ait açı } d\varphi, \text{ kemer}$$

yarıçapı r ise $ds = r d\varphi$ olur.

$$\epsilon = \frac{d\bar{s}}{r d\varphi} - 1$$

Şekilsel eksenlere göre $d\bar{s}^2 = dx^2 + dy^2$ (A) $\left(\frac{d\bar{s}}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2$

deformatsiyondan sonra $m'(x, y)$ nin Cartesien koordinatları

$$x = (r-w) \sin\varphi + r \cos\varphi \quad y = (r-w) \cos\varphi - r \sin\varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = (r-w) \cos\varphi - \frac{dw}{d\varphi} \sin\varphi - r \sin\varphi + \frac{dr}{d\varphi} \cos\varphi$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -(r-w) \sin\varphi - \frac{dw}{d\varphi} \cos\varphi - r \cos\varphi - \frac{dr}{d\varphi} \sin\varphi$$

Özell olarak $\varphi=0$ alalım.

$$\left(\frac{d\bar{s}}{d\varphi}\right)^2 = \left(r-w + \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \left(r + \frac{dw}{d\varphi}\right)^2$$

$$\frac{d\bar{s}}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(w - \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - 2r \left(w - \frac{dr}{d\varphi}\right) + \left(r + \frac{dw}{d\varphi}\right)^2}$$

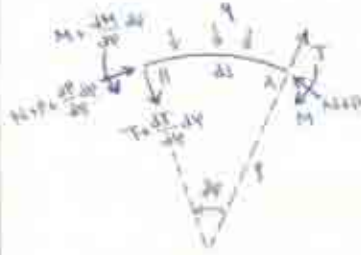
$$\frac{d\bar{s}}{d\varphi} = r \sqrt{1 + \frac{\left(w - \frac{dr}{d\varphi}\right)^2}{r^2} - 2 \frac{\left(w - \frac{dr}{d\varphi}\right)}{r} + \frac{\left(r + \frac{dw}{d\varphi}\right)^2}{r^2}}$$

Her iki tarafındaki 2. ve 4. terimleri birleştirip Binom'a açarsak

$$\frac{d\bar{s}}{d\varphi} = r \left[1 - \frac{\left(w - \frac{dr}{d\varphi}\right)}{r} \right] \quad \epsilon = \frac{d\bar{s}}{r d\varphi} - 1 = 0 \text{ olması gerektiğinden}$$

$$\epsilon = \frac{d\bar{s}}{r d\varphi} - 1 = \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\varphi} - w \right) = 0 \quad w = \frac{dr}{d\varphi} \text{ bulunur}$$

DİFFERANSİYEL DENKLEMİN KURULMASI



Kemenden ds lık bir dilim alıncak dengeğini düşünelim. Deformasyondan sonra A noktasında M, T, P meydana gelsin, B noktasında da bunlar

$$M + \frac{dM}{ds} ds \quad P + \frac{dP}{ds} ds \quad T + \frac{dT}{ds} ds \text{ olsunlar.}$$

r ile eğriye yarı çapı olduğundan $ds = r \cdot d\phi$

ds uzunluğuna gelen basınca ise $q \cdot ds$ olur. Şimdi $T + \frac{dT}{ds} ds$ ve $P + \frac{dP}{ds} ds$ üzerine izdüşüm ile bunların tesir ettiği eksen noktasına göre moment alarak denge denklemlerimizi yazalım.

$$(1) \quad T + \frac{dT}{ds} ds + q \cdot ds \cdot \cos \frac{d\phi}{2} - T \cos d\phi - (N+P) \sin d\phi = 0$$

$$(2) \quad N+P + \frac{dP}{ds} ds - (N+P) \cos d\phi + T \sin d\phi - q \cdot ds \cdot \sin \frac{d\phi}{2} = 0$$

$$(3) \quad T \cdot ds + \frac{dM}{ds} ds = 0$$

$$\sin d\phi = d\phi \quad \cos d\phi = 1 \text{ yazıp kısaltırsak}$$

$$(1) \quad \frac{dT}{ds} + q \cdot r - (N+P) = 0 \quad (2) \quad \frac{dP}{ds} + T = 0 \quad (3) \quad T \cdot r + \frac{dM}{ds} = 0$$

M zıvalık değeri göz önüne alınarak (3) den

$$T = -\frac{1}{r} \frac{dM}{ds} = -\frac{EI}{r^2} \left(\frac{dw}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} \right) \frac{1}{r}$$

r yerine yaktıkla alarak r yazarak

$$T = -\frac{EI}{r^2} \left(\frac{dw}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} \right) \text{ bulunur.}$$

$$(2) \text{ ifadesinde } N = q \cdot r \text{ yazarak } P = \frac{dT}{ds} + q \cdot (r - r) \text{ bulunur.}$$

Eğilme kavramından $(r - r) = -\frac{M}{EI} \frac{1}{r^2}$ M ve T yerine konarak

$$P = -q \left(w + \frac{d^2w}{ds^2} \right) - \frac{EI}{r^2} \left(\frac{dw}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} \right) \text{ bulunur.}$$

Bu değerler u de yerine konarak

$$\frac{d^2 v}{d\psi^2} + \left(2 + \frac{qr^2}{EI}\right) \frac{dv}{d\psi} + \left(1 + \frac{qr^2}{EI}\right) v = 0$$

$1 + \frac{qr^2}{EI} = \beta^2$ diyerek $u = \frac{dv}{d\psi}$ yerine yazarsak

$$\frac{d^2 u}{d\psi^2} + (1 + \beta^2) \frac{du}{d\psi} + \beta^2 u = 0 \text{ bulunur.}$$

Denklemin ψ zümünü $u = e^{m\psi}$ yazarak

$$\text{karakteristik denklemin } m^2 + (1 + \beta^2)m + \beta^2 = 0$$

$$\begin{matrix} m_1 = 0 & m_2 = -\beta & m_3 = -\beta \\ m_4 = 0 & m_5 = -1 & m_6 = -1 \end{matrix} \text{ bulunur}$$

$$\text{zözümler: } v = C_1 + C_2 \cos \psi + C_3 \cos \beta \psi + C_4 \psi + C_5 \sin \psi + C_6 \sin \beta \psi$$

BASLANGIÇ DEğERLER METODU İLE ÇÖZÜM



Başlangıçtaki kesir ve değerler

v_0, u_0, M_0, T_0, P_0 olsun, hesaplar da gelirse güzel katsayılar yerine fizik manaları olan

bu katsayıları kullanacağız. v fonksiyonunu

bulduktan sonra bunları kolayca v cinsinden bulacağız.

İhtilali hesaplarıdan :

$$v = \frac{dv}{d\psi}$$

$$u = \frac{1}{r} \left(v + \frac{d^2 v}{d\psi^2} \right)$$

$$M = \frac{EI}{r^2} \left(\frac{dv}{d\psi} + \frac{d^2 v}{d\psi^2} \right)$$

$$T = -\frac{EI}{r^2} \left(\frac{d^2 v}{d\psi^2} + \frac{d^3 v}{d\psi^3} \right)$$

$$P = -q \left(\frac{dv}{d\psi} + \frac{d^2 v}{d\psi^2} \right) - \frac{EI}{r^2} \left(\frac{d^2 v}{d\psi^2} + \frac{d^3 v}{d\psi^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
 v &= C_1 + C_2 \cos \varphi + C_3 \cos 3\varphi + C_4 \varphi + C_5 \sin \varphi + C_6 \sin 3\varphi \\
 v' &= -C_2 \sin \varphi - C_3 3 \sin 3\varphi + C_4 + C_5 \cos \varphi + C_6 3 \cos 3\varphi \\
 v'' &= -C_2 \cos \varphi - C_3 9 \cos 3\varphi - C_5 \sin \varphi - C_6 9 \sin 3\varphi \\
 v''' &= C_2 \sin \varphi + C_3 27 \sin 3\varphi - C_5 \cos \varphi - C_6 27 \cos 3\varphi \\
 v^{(4)} &= C_2 \cos \varphi + C_3 81 \cos 3\varphi + C_5 \sin \varphi + C_6 81 \sin 3\varphi \\
 v^{(5)} &= -C_2 \sin \varphi - C_3 243 \sin 3\varphi - C_5 \cos \varphi - C_6 243 \cos 3\varphi
 \end{aligned}$$

kenarlar ve deformeşyonlar keskin edilecek

$$\begin{aligned}
 v &= C_1 + C_2 \cos \varphi + C_3 \cos 3\varphi + C_4 \varphi + C_5 \sin \varphi + C_6 \sin 3\varphi \\
 w &= -C_2 \sin \varphi - C_3 3 \sin 3\varphi + C_4 + C_5 \cos \varphi + C_6 3 \cos 3\varphi \\
 \Omega &= \frac{1}{r} [C_1 + C_3 (1-z^2) \cos 3\varphi + C_4 \varphi + C_6 (1-z^2) \sin 3\varphi] \\
 M &= \frac{EI}{r^2} [-C_2 3 (1-z^2) \sin 3\varphi + C_4 + C_6 3 (1-z^2) \cos 3\varphi] \\
 T &= -\frac{EI}{r^2} [-C_3 3^2 (1-z^2) \cos 3\varphi - C_6 3^2 (1-z^2) \sin 3\varphi] \\
 P &= -q [-C_3 3 (1-z^2) \sin 3\varphi + C_4 + C_6 3 (1-z^2) \cos 3\varphi] \\
 &\quad - \frac{EI}{r^3} [C_3 3^3 (1-z^4) \sin 3\varphi - C_6 3^3 (1-z^4) \cos 3\varphi]
 \end{aligned}$$

$\varphi=0$ başlangıç değerleri bulunacağından

$$\begin{aligned}
 v_0 &= C_1 + C_2 + C_3 & M_0 &= \frac{EI}{r^2} [C_4 + C_6 3(1-z^2)] \\
 w_0 &= C_4 + C_5 + C_6 3 & T_0 &= \frac{EI}{r^2} C_3 3^2 (1-z^2) \\
 \Omega_0 &= \frac{1}{r} [C_1 + C_3(1-z^2)] \\
 P_0 &= -q [C_4 + C_6 3(1-z^2)] + \frac{EI}{r^3} C_6 3^3 (1-z^4)
 \end{aligned}$$

buradan başlangıç değerlerine bağlı katabayılır

$$C_1 = \Omega_0 r - \frac{r^2}{EI} \frac{T_0}{3} \quad C_2 = v_0 - \Omega_0 r - \frac{r^2}{EI} \frac{T_0}{1-z^2} \quad C_3 = \frac{r^2}{EI} \frac{T_0}{3^2(1-z^2)}$$

$$C_4 = M_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{\beta^2} - P_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{\beta^2} \quad C_5 = w_0 - P_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{\beta^2}$$

$$C_6 = P_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{\beta^2(1-\beta^2)} - M_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{\beta^2}$$

fonksiyonlar

$$v = \alpha_0 r - \frac{r^3}{EI} \frac{T_0}{\beta^2} + v_0 \cos \beta r - \alpha_0 r \cos \beta r - \frac{r^3}{EI} \frac{T_0}{1-\beta^2} \cos \beta r + \frac{r^3}{EI} \frac{T_0}{\beta^2(1-\beta^2)} \cos \beta r$$

$$+ M_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{\beta^2} \psi - P_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{\beta^2} \psi + w_0 \sin \beta r - P_0 \frac{r^3}{EI} \frac{1}{\beta^2} \sin \beta r + P_0 \frac{r^3}{EI} \frac{1}{\beta^2(1-\beta^2)} \sin \beta r$$

$$- M_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{\beta^2} \sin \beta r$$

$$w = -v_0 \sin \beta r + \alpha_0 r \sin \beta r + \frac{r^3}{EI} \frac{T_0}{1-\beta^2} \sin \beta r - \frac{r^3}{EI} \frac{T_0}{\beta^2(1-\beta^2)} \sin \beta r + M_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{\beta^2}$$

$$- P_0 \frac{r^3}{EI} \frac{1}{\beta^2} + w_0 \cos \beta r - P_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{(1-\beta^2)} \cos \beta r + P_0 \frac{r^2}{EI} \frac{\cos \beta r}{\beta^2(1-\beta^2)} - M_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{\beta^2} \cos \beta r$$

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{r^2}{EI} \frac{T_0}{\beta^2} + \frac{r^2}{EI} \frac{T_0}{\beta^2} \cos \beta r + M_0 \frac{r}{EI} \frac{1}{\beta^2} \psi + P_0 \frac{r^2}{EI} \beta^2 \psi$$

$$+ P_0 \frac{r^2}{EI} \frac{1}{\beta^2} \sin \beta r - M_0 \frac{r}{EI} \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \sin \beta r$$

$$M = -\frac{r}{\beta} T_0 \sin \beta r + M_0 \frac{1}{\beta^2} - P_0 \frac{r}{\beta^2} + P_0 \frac{r}{\beta^2} \cos \beta r - M_0 \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \cos \beta r$$

$$T = T_0 \cos \beta r + P_0 \frac{1}{\beta} \sin \beta r - M_0 \frac{1}{\beta} \frac{1-\beta^2}{\beta} \sin \beta r$$

$$P = -\frac{qr^3}{EI} \frac{T_0}{\beta} \sin \beta r + M_0 \frac{qr^2}{EI} \frac{1}{\beta^2} - P_0 \frac{qr^2}{EI} \frac{1}{\beta^2} + P_0 \frac{qr^2}{EI} \frac{1}{\beta^2} \cos \beta r$$

$$- M_0 \frac{qr^2}{EI} \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \cos \beta r + T_0 \beta \sin \beta r - P_0 \cos \beta r + M_0 \frac{1}{\beta} (1-\beta^2) \cos \beta r$$

Boyutsuz Değişkenlerle:

$$v = \frac{F}{r} \quad w = \frac{w}{r} \quad M = M \frac{r}{EI} \quad T = T \frac{r}{EI} \quad P = P \frac{r^2}{EI}$$

Şimdi kesirler ve deformatasyonlar boyutsuz sayılardır.

Bundan böyle bütün hesaplarda $EI = EI$ kabul edilmiştir.

Fonksiyonları aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$v = f_{11}(\varphi) v_0 + f_{12}(\varphi) w_0 + f_{13}(\varphi) z_0 + f_{14}(\varphi) u_0 + f_{15}(\varphi) T_0 + f_{16}(\varphi) P_0$$

$$w = f_{21}(\varphi) v_0 + f_{22}(\varphi) w_0 + \dots$$

$$M = f_{31}(\varphi) v_0 + f_{32}(\varphi) w_0 + \dots$$

Aşağıda tarif edilen matrisi taşıma matrisi diyelim.

$$F(\varphi) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots & f_{26} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ f_{31} & & & & & f_{36} \end{vmatrix}$$

taşıma Matrisinin özellikleri

1) $\varphi \rightarrow 1$ differansiyel denkleminin (homojen)

$$\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + 2 \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0 \quad \text{lineer cebirlerin genel}$$

göçleme halinde taşıma matrisini verir.

2) $F(\varphi_1) F(\varphi_2) = F(\varphi_1 + \varphi_2)$ özelliği vardır.

3) $|F(\varphi)| = 1$ φ nin her değeri için

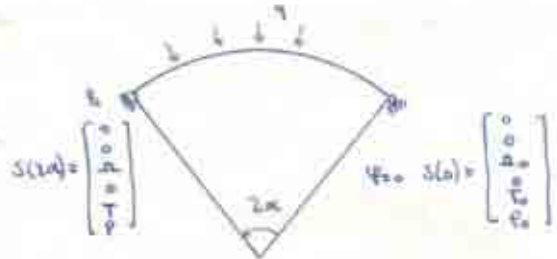
özel olarak $\varphi = 0$ için

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

10
F(4) transformasi Matriks

	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4
v_1	$\cos 4$	$\sin 4$	$1 - \cos 4$	$\frac{34 - \sin 34}{3^2}$	$-\frac{3(1-3^2)4 - 3^2 \sin 4 + \sin 34}{3^2(1-3^2)}$
v_2	$-\sin 4$	$\cos 4$	$\sin 4$	$\frac{1 - \cos 34}{3^2}$	$\frac{3^2(1 - \cos 4) - (1 - \cos 34)}{3^2(1-3^2)}$
v_3	0	0	1	$\frac{34 - (1-3^2)\sin 4}{3^2}$	$-\frac{34 + \sin 34}{3^2}$
v_4	0	0	0	$\frac{1 - (1-3^2)\cos 4}{3^2}$	$-\frac{1 + \cos 34}{3^2}$
v_5	0	0	0	$-\frac{(1-3^2)\sin 4}{3}$	$\frac{\sin 34}{3}$
v_6	0	0	0	$\frac{(1-3^2)(\cos 34 - 1)}{3^2}$	$\frac{(1-3^2) - \cos 34}{3^2}$

IKI UJUN MAFKALLI KEMER



$S(\alpha)$ baslangy kalon matras ik $F(\alpha)$ yardymyie $S(2\alpha)$ ya gesebiliriz.

$$S(2\alpha) = F(2\alpha) \cdot S(0)$$

B mesnedinin şartlari olan 1, 2, 4 dattirlari yazarizale.

$$f_{12}(2\alpha) \cdot \alpha_0 + f_{13}(2\alpha) \cdot T_0 + f_{14}(2\alpha) \cdot P_0 = 0$$

$$f_{22}(2\alpha) \cdot \alpha_0 + f_{23}(2\alpha) \cdot T_0 + f_{24}(2\alpha) \cdot P_0 = 0$$

$$f_{42}(2\alpha) \cdot \alpha_0 + f_{43}(2\alpha) \cdot T_0 + f_{44}(2\alpha) \cdot P_0 = 0$$

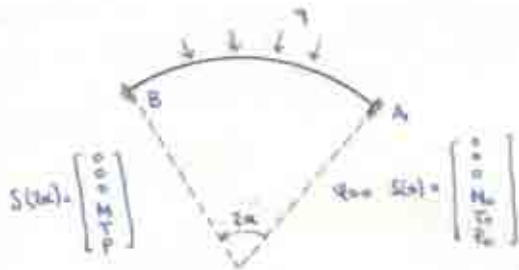
(α_0, T_0, P_0) triidil qozilm olumasi yani dardeden farkli denge konyuu olumasi iye bu tarkimin katbyklar deteminanti zifir olumali.

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos 2\alpha & \frac{3^2(1 - \cos 2\alpha) - (1 - \cos 2\alpha)}{3^2(1 - 3^2)} & \frac{-3(1 - 3^2)\alpha - 3^2 \sin \alpha + \sin 3\alpha}{3^2(1 - 3^2)} \\ \sin 2\alpha & \frac{3 \sin 2\alpha - \sin 6\alpha}{3(1 - 3^2)} & \frac{3^2(1 - \cos 2\alpha) - (1 - \cos 2\alpha)}{3^2(1 - 3^2)} \\ 0 & -\frac{\sin 2\alpha}{3} & \frac{-1 + \cos 2\alpha}{3^2} \end{vmatrix} = 0$$

Determinant asitirsa

$$\sin \alpha g = 0 \quad \left(1 - \frac{1}{\alpha} \tan \alpha\right) - \frac{1}{3^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha g} \tan \alpha g\right) = 0 \quad \text{qilear}$$

IKI UCU ANKASTRE KEMER



$S(\alpha)$ berbentuk kolom matriks ile $F(\alpha)$ yadani ile $S(2\alpha)$ ya yexebitiriz.

$$S(2\alpha) = F(2\alpha) \cdot S(\alpha)$$

B mesnedinin factores olan 1, 2, 3 entelare yazarsak

$$f_{11}(2\alpha) M_0 + f_{12}(2\alpha) T_0 + f_{13}(2\alpha) P_0 = 0$$

$$f_{21}(2\alpha) M_0 + f_{22}(2\alpha) T_0 + f_{23}(2\alpha) P_0 = 0$$

$$f_{31}(2\alpha) M_0 + f_{32}(2\alpha) T_0 + f_{33}(2\alpha) P_0 = 0$$

M_0, T_0, P_0 isin trivial olmayan bir çözüm isin yani dersden farklı dengenle kasimur isin bu bulgulari katabaylar determinant sifir almalı

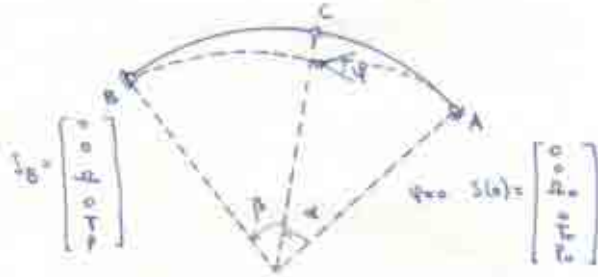
$$\begin{vmatrix} \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\alpha^2} & \frac{\alpha^2(1 - \cos 2\alpha) - (1 - \cos 2\alpha)}{\alpha^2(1 - \alpha^2)} & \frac{-\alpha(1 - \alpha^2)2\alpha - \alpha^2 \sin 2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2(1 - \alpha^2)} \\ \frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha^2} & \frac{\alpha \sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{\alpha(1 - \alpha^2)} & \frac{\alpha^2(1 - \cos 2\alpha) - (1 - \cos 2\alpha)}{\alpha^2(1 - \alpha^2)} \\ \frac{2\alpha - (1 - \alpha^2) \sin 2\alpha}{\alpha^2} & \frac{\cos 2\alpha - 1}{\alpha^2} & \frac{-2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2} \end{vmatrix} = 0$$

Determinant asilise

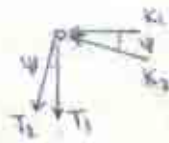
$$\alpha \alpha \alpha - \alpha \alpha \alpha = 0 \quad (1 - \alpha \cos 2\alpha) - \frac{1}{\alpha^2} (1 - \alpha \alpha \cos 2\alpha) = 0$$

bulunur.

Üç MAFSALLI KEMER



Üç mafsalı kemelerde $\psi = \alpha$ için bir süreksizlik vardır. v, w ve M fonksiyonlarında bir sıçrama yok. Dönmedeki süreksizlik ψ olsun. T ve P deki süreksizlik mafsalın denge denklemlerinden



$$K_1 = N + P_1 \quad K_2 = N + P_2 \text{ dersek}$$

K ve T ψ deplasmanından önce

$$K_2 = K_1 \cos \psi - T_1 \sin \psi$$

$$T_2 = T_1 \cos \psi + K_1 \sin \psi \quad \sin \psi = \psi$$

açılar küçük olduğundan $\cos \psi = 1$

$$\Delta K = K_2 - K_1 = -T_1 \psi$$

$$\Delta K = -T_1 \psi$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = K_1 \psi$$

$$\Delta T = \psi T_1 + P_1 \psi$$

T_1 ve P_1 değerleri ikinci derece olduğundan bunların ψ ile çarpımları terk edilebilir.

0 halde K (dolayısıyla P) fonksiyonunda süreksizlik yok.

T deki süreksizlik $+\psi T_1$

bağımsuz değişkenlerle $\psi T_1 \frac{d^2}{d\psi^2} \psi = (\frac{d^2}{d\psi^2} - 1) \psi$ bulunur.

K süreksizlik kolon matrisi $K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\frac{d^2}{d\psi^2} - 1) \psi \\ 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

$S(0)$ kolon matrisi A mesnedi için

$$S_1(x) = F(x) \cdot S(0) \quad C \text{ mesnedi hemen önce}$$

$$S_2(x) = S_1(x) + K \quad " \quad " \quad \text{sonra}$$

$S_2(x)$ bulunduktan sonra β ilerdeki B mesnedi için

$$S(\beta) = F(\beta) [F(x) \cdot S(0) + K]$$

$$S(\beta) = [F(\beta) \cdot F(x)] S(0) + F(\beta) \cdot K$$

grupun özelliğinden faydalanarak

$$S(\beta) = F(x, \beta) \cdot S(0) + F(\beta) \cdot K$$

Bu ifadeden B mesnedinin şartları olan 1, 2, 4 şartları için yazarsak

$$f_{11}(x, \beta) \cdot z_0 + f_{12}(x, \beta) \cdot T_0 + f_{13}(x, \beta) \cdot P_0 + \{f_{11}(\beta) + (\beta^2 - 1) f_{11}(\beta)\} \psi = 0$$

$$f_{21}(x, \beta) \cdot z_0 + f_{22}(x, \beta) \cdot T_0 + f_{23}(x, \beta) \cdot P_0 + \{f_{21}(\beta) + (\beta^2 - 1) f_{21}(\beta)\} \psi = 0$$

$$f_{41}(x, \beta) \cdot z_0 + f_{42}(x, \beta) \cdot T_0 + f_{43}(x, \beta) \cdot P_0 + \{f_{41}(\beta) + (\beta^2 - 1) f_{41}(\beta)\} \psi = 0$$

4 cü denklemin mafsulda momentin sıfır olmasından

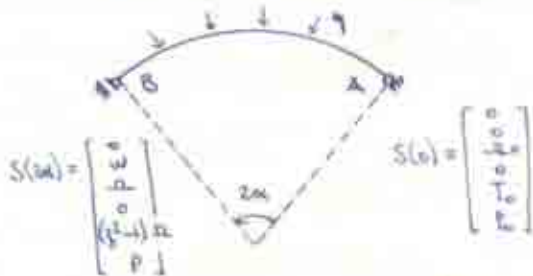
$$f_{41}(x) \cdot z_0 + f_{42}(x) \cdot T_0 + f_{43}(x) \cdot P_0 = 0$$

Bu 4 lineer denklemin katıngular determinanı ise stabilite şartını verecek.

UG MAFKALU KEMER STABILITAS PARTI

σ_0	τ_0	P_0	ψ
$1 - \cos(\alpha + \beta)$	$\frac{\gamma^2 [1 - \cos(\alpha + \beta)] - 1 + \cos \gamma(\alpha + \beta)}{\gamma^2 (1 - \gamma^2)}$	$\frac{-\gamma(1 - \gamma^2)(\alpha + \beta) - \gamma^2 \sin(\alpha + \beta) + \sin \gamma(\alpha + \beta)}{\gamma^2 (1 - \gamma^2)}$	$\frac{1 - \cos \gamma \beta}{\gamma^2}$
$\sin(\alpha + \beta)$	$\frac{\gamma \sin(\alpha + \beta) - \sin \gamma(\alpha + \beta)}{\gamma (1 - \gamma^2)}$	$\frac{\gamma^2 [1 - \cos(\alpha + \beta)] - 1 + \cos \gamma(\alpha + \beta)}{\gamma^2 (1 - \gamma^2)}$	$\frac{\sin \gamma \beta}{\gamma}$
0	$-\frac{\sin \gamma(\alpha + \beta)}{\gamma}$	$\frac{-1 + \cos \gamma(\alpha + \beta)}{\gamma^2}$	$\frac{(1 - \gamma^2) \sin \gamma \beta}{\gamma}$
0	$-\frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma}$	$\frac{-1 + \cos \gamma \alpha}{\gamma^2}$	0

BİR UCU KAYICI MAFİALLİ KEMER



$$S(2\alpha) = \begin{bmatrix} \omega \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ (\gamma^2 - 1)\alpha \\ P \end{bmatrix}$$

$$S(\alpha) = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \alpha_0 \\ T_0 \\ P_0 \end{bmatrix}$$

$S(\alpha)$ başlangıç kolon matrisinden $F(\alpha)$ taşıma matrisi ile $S(2\alpha)$ kolon matrisine gelebiliriz.

$$S(2\alpha) = F(2\alpha) \cdot S(\alpha)$$

B mesnedinin şartları olan 4, 4, 5 şartları yazılarak

$$f_{12}(2\alpha)\alpha_0 + f_{13}(2\alpha)T_0 + f_{16}(2\alpha)P_0 = 0$$

$$f_{22}(2\alpha)\alpha_0 + f_{23}(2\alpha)T_0 + f_{26}(2\alpha)P_0 = 0$$

$$\left\{ f_{12}(2\alpha) - (\gamma^2 - 1)f_{22}(2\alpha) \right\} \alpha_0 + \left\{ f_{13}(2\alpha) - (\gamma^2 - 1)f_{23}(2\alpha) \right\} T_0 + \left\{ f_{16}(2\alpha) - (\gamma^2 - 1)f_{26}(2\alpha) \right\} P_0 = 0$$

α_0, T_0, P_0 nin trivial olmayan değerler olması yani ikisi bir denge konumunun olması için bu teklinin katsayıları $\Delta = 0$ olması.

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos 2\alpha & \frac{\gamma^2(1 - \cos 2\alpha) - 1 + \cos 2\gamma\alpha}{\gamma^2(1 - \gamma^2)} & \frac{-\gamma(1 - \gamma^2)2\alpha - \gamma^2 \sin 2\alpha + \sin 2\gamma\alpha}{\gamma^2(1 - \gamma^2)} \\ 0 & -\frac{\sin 2\gamma\alpha}{\gamma} & \frac{-1 + \cos 2\gamma\alpha}{\gamma^2} \\ (1 - \gamma^2) & \frac{\gamma^2 - 1 + \cos 2\gamma\alpha}{\gamma^2} & \frac{\sin 2\gamma\alpha + 2\gamma\alpha(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} \end{vmatrix} = 0$$

Determinant açılırsa

$$2 \cos 2\alpha + 2\gamma\alpha(\gamma^2 - 1) \sin 2\gamma\alpha \cos 2\alpha - 2 \cos 2\gamma\alpha \cos 2\alpha - \gamma^2 \sin 2\alpha \sin 2\gamma\alpha = 0$$

$$z \cos 2\alpha + 2z^2(z^2-1) \sin 2\alpha \cos 2\alpha - 2 \cos 2\alpha \cos 2\alpha - z^3 \sin 2\alpha \sin 2\alpha = 0$$

Denklemin G6z6m6u:

$$1) \alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$-z (0.742z^2 + 0.524) \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} + 1 = 0$$

$$z = 2.79 \quad +0.046$$

$$z = 2.78 \quad -0.05$$

$$z = 2.785$$

$$z = 6.0$$

$$2) \alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$z (-1.313z^2 + 1.047) \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} - 1 = 0$$

$$z = 1.64 \quad -0.037$$

$$z = 1.65 \quad +0.150$$

$$z = 1.642$$

$$z = 3.0$$

$$3) \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$-1.57z(z^2-1) \sin \pi z + \cos \pi z - 1 = 0$$

$$z = 1.85 \quad +0.09$$

$$z = 1.84 \quad -0.005$$

$$z = 1.840$$

$$z = 2.0$$

$$4) \alpha = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

$$z (-1.218z^2 + 2.084) \sin \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} - 1 = 0$$

$$z = 1.88 \quad +0.030$$

$$z = 1.37 \quad -0.003$$

$$z = 1.371$$

$$z = 1.5$$

$$5) \alpha = \frac{3\pi}{4} = 150^\circ$$

$$z (3.486z^2 - 2.62) \sin \frac{5\pi}{4} z - \cos \frac{5\pi}{4} + 1 = 0$$

$$z = 1.2$$

$$6) \alpha = \pi = 180^\circ$$

$$3.14z(z^2-1) \sin 2\pi z - \cos 2\pi z + 1 = 0$$

$$z = 1$$

$$0$$

$$z = 1.546$$

$$0.028$$

$$7) \quad \alpha = \frac{5\pi}{6} = 75^\circ$$

$$\zeta (2.26 - 2.76 \zeta^2) \sin \frac{5\pi}{6} \zeta + 1.722 \cos \frac{5\pi}{6} \zeta - 1.722 = 0$$

$$\zeta = 1.45 \quad +0.008 \quad \text{k\u00fcl\u00e4} \quad \zeta = 1.450 \quad \zeta = 2.40$$

$$8) \quad \alpha = \frac{5\pi}{3} = 100^\circ$$

$$\zeta (2.281 - 2.329 \zeta^2) \sin \frac{10\pi}{3} \zeta + 1.88 \cos \frac{10\pi}{3} \zeta - 1.88 = 0$$

$$\zeta = 1.20 \quad -0.07 \quad \text{k\u00fcl\u00e4} \quad \zeta = 1.203$$

$$\zeta = 1.21 \quad +0.16$$

$$9) \quad \alpha = \frac{7\pi}{12} = 105^\circ$$

$$\zeta (2.178 - 2.678 \zeta^2) \sin \frac{7\pi}{12} \zeta + 1.722 \cos \frac{7\pi}{12} \zeta - 1.722 = 0$$

$$\zeta = 1.20 \quad +0.10 \quad \text{k\u00fcl\u00e4} \quad \zeta = 1.294 \quad \zeta = 1.714$$

$$\zeta = 1.29 \quad -0.026$$

$$10) \quad \alpha = \frac{11\pi}{18} = 110^\circ$$

$$\zeta (2.294 - 2.299 \zeta^2) \sin \frac{11\pi}{9} \zeta + 1.532 \cos \frac{11\pi}{9} \zeta - 1.532 = 0$$

$$\zeta = 1.20 \quad +0.066 \quad \text{k\u00fcl\u00e4} \quad \zeta = 1.295$$

$$\zeta = 1.29 \quad -0.065$$

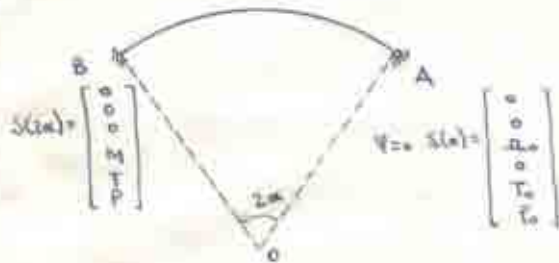
$$11) \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

$$\zeta^2 \sin \frac{3\pi}{2} \zeta = 0 \quad \text{k\u00fcl\u00e4} \quad \zeta = 1.233$$

Bu tablodan ζ ve $\alpha = \zeta^2 - 1$ de\u011ferlerini bir tabloda toplayalım.

α	30°	60°	75°	90°	100°	105°	110°	120°	135°	150°	180°
ζ	2.285	1.642	1.450	1.240	1.263	1.294	1.295	1.291	1.233	1.20	1.0
α	1.76	1.70	1.10	0.90	0.70	0.67	0.69	0.77	0.78	0.44	0

BİR UCU MAKALLI, BİR UCU ANKASTRE KEMER



Matris bilgisi ile $F(x)$ taşıma matrisi ve başlangıçtaki $S(0)$ kolon matrisinden $S(2\alpha)$ geçebiliriz:

$$S(2\alpha) = F(2\alpha) \cdot S(0)$$

Burada B mesnedinin şartları olan ilk üç satırı yazarsak

$$f_{12}(2\alpha) \cdot 2\alpha + f_{13}(2\alpha) T_0 + f_{14}(2\alpha) P_0 = 0$$

$$f_{22}(2\alpha) \cdot 2\alpha + f_{23}(2\alpha) T_0 + f_{24}(2\alpha) P_0 = 0$$

$$f_{32}(2\alpha) \cdot 2\alpha + f_{33}(2\alpha) T_0 + f_{34}(2\alpha) P_0 = 0$$

$2\alpha, T_0, P_0$ için trivial çözüm olmaması için katsayılar determinanı sıfır olmalı

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \cos 2\alpha & \frac{\beta^2(1 - \cos 2\alpha) - (1 - \cos 2\beta\alpha)}{\beta^2(1 - \beta^2)} & \frac{-\beta(1 - \beta^2)2\alpha - \beta^3 \sin 2\alpha + \sin 2\beta\alpha}{\beta^2(1 - \beta^2)} \\ \sin 2\alpha & \frac{\beta \sin 2\alpha - \sin 2\beta\alpha}{\beta(1 - \beta^2)} & \frac{\beta(1 - \cos 2\alpha) - (1 - \cos 2\beta\alpha)}{\beta^2(1 - \beta^2)} \\ 1 & \frac{\cos 2\beta\alpha - 1}{\beta^2} & \frac{-2\beta\alpha + \sin 2\beta\alpha}{\beta^2} \end{vmatrix}$$

Determinanti uyar düzenlersek (z bölerek)

$$2(z^2 - z^4 - 1) \cos 2\alpha \cos 2z\alpha - z(1+z^2) \sin 2\alpha \sin 2z\alpha + 2(1-z^2) \cos 2\alpha \\ - 2z\alpha(1-z^2) \sin 2z\alpha \cos 2\alpha - 2z^3(1-z^2) \cos 2z\alpha + 2z^5\alpha(1-z^2) \cos 2z\alpha \sin 2\alpha + 2z^2 = 0$$

Denklemi çözümü:

1) $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$

$$[0.088z^4 - 0.088z^2 - 1.0] \cos \frac{\pi z}{3} - [0.243z^3 + 1.285z] \sin \frac{\pi z}{3} + 1 + z^2 = 0$$

$$\begin{array}{l} z = 2.20 \quad -6.20 \\ z = 2.19 \quad +0.05 \\ z = 2.18 \quad +3.50 \end{array}$$

$$6.0 < 7.190 < 8.621$$

2) $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

$$[1.195z^4 - 1.195z^2 + 1] \cos \frac{2\pi z}{3} - [1.913z^3 - 0.181z] \sin \frac{2\pi z}{3} + 3z^2 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{l} z = 3.62 \quad +2.80 \\ z = 3.63 \quad -2.65 \end{array}$$

$$3.0 < 3.625 < 4.375$$

3) $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

$$(2z^4 - 2z^2 + 1) \cos \pi z - 1.57z(z^2 - 1) \sin \pi z + 2z^2 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{l} z = 2.45 \quad +1.55 \\ z = 2.46 \quad -0.42 \end{array}$$

$$2 < 2.458 < 3.0$$

4) $\alpha = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

$$[6.629z^4 - 6.629z^2 + 1] \cos \frac{4\pi z}{3} - (1.218z^3 - 2.950z) \sin \frac{4\pi z}{3} + 3z^2 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{l} z = 1.50 \quad +0.81 \\ z = 1.51 \quad -2.33 \end{array}$$

$$1.5 < 1.503 < 2.364$$

5) $\alpha = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$

$$[5.534z^4 - 5.534z^2 + 1.0] \cos \frac{5\pi z}{3} + z(2.550z^2 - 1.218) \sin \frac{5\pi z}{3} + z^2 + 1 = 0$$

$$\begin{array}{l} z = 1.60 \quad +1.06 \\ z = 1.61 \quad -0.29 \end{array}$$

$$1.2 < 1.608 < 2.066$$

$$4) \alpha = 0 = 180^\circ$$

$$3.14 \cdot z (z^2 - 1) \sin 2\pi z - \cos 2\pi z + 1 = 0$$

$$z = 1.0 \quad 0 \quad z = 1.546 \quad +0.01$$

\mathcal{R} katsayılarının bulunması.

$$z^2 = 1 + \frac{\mathcal{R}^2}{G^2} \text{ demektir} \quad z^2 - 1 = \mathcal{R} \text{ ile yeni bir katanga}$$

tanımlayalım $\mathcal{R}_{\text{tar}} = \mathcal{R} \frac{G}{r_3}$ olsun.

Yazdığımız problemlerin $z = z(\alpha)$ ve $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\alpha)$ tablolarını yapalım.

z değerleri

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
	2.985	1.642	1.340	1.371	1.2	1.0
	4.0	3.0	2.0	1.5	1.2	1.0
	7.150	3.625	2.458	1.903	1.668	1.0
	8.621	4.875	3.0	2.314	2.066	1.0

\mathcal{R} değerleri

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
	6.76	1.70	0.80	0.88	0.44	0
	35.0	8.0	3.0	1.25	0.44	0
	51.70	12.14	5.0	2.62	1.53	0
	73.32	18.14	8.0	4.53	3.27	0